

CALCUL PAR ITERATION D'UNE COUCHE LIMITE TRIDIMENSIONNELLE ET COMPARAISON EXPERIMENTALE

L. F. TSEN et J. F. ARNAUDON

Université de Poitiers, Centre d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques, 43, Rue de l'Aérodrome, 86-Poitiers, France

(Reçu le 12 Octobre 1971)

Résumé—Une méthode itérative est décrite pour étudier la couche limite tridimensionnelle laminaire en écoulement compressible. A partir des équations du mouvement dans un système de coordonnées lié aux lignes de courant extérieures, les équations itératives sont construites en réduisant de trois à deux le nombre de variables indépendantes, en découpant et en linéarisant l'équation de quantité de mouvement transversal. La première itération restitue l'approximation de faible écoulement transversal dans le cas où le coefficient de pondération est nul. Cette méthode est appliquée aux équations intégrales de la couche limite sur un cône dans un écoulement supersonique. La convergence est obtenue au bout de cinq ou six itérations même dans les cas sévères d'écoulement transversal intense avec paroi chauffée. Les expériences de mesures de pression, de directions de ligne de courant pariétales et de transfert de chaleur sur le cône sont ensuite présentées pour une large gamme de températures de paroi et d'incidences. Les résultats théoriques sont alors comparés aux expériences et discutés.

NOTATIONS

s, y, z , système de coordonnées orthogonales liées aux lignes de courant extérieures;

ξ, η , système de coordonnées défini par (5);

$r, K\phi$, coordonnées polaires sur le cône développé, $K = \sin \theta_c$ pour un cône circulaire;

u, v, w , composantes de la vitesse suivant s, y, z ;

H, h , enthalpies totale et statique; définies par (6);

f, g, t , éléments suivant s, z de la métrique à la surface;

K_1, K_2 , courbures géodésiques des lignes z et s

$$K_1 = -\frac{1}{e_1 e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s}$$

$$K_2 = -\frac{1}{e_1 e_2} \frac{\partial e_1}{\partial z};$$

p, p_t , pressions statique et totale sur le cône;

M_* , nombre de Mach critique;

θ_c , demi angle au sommet du cône;

k , paramètre de gradient de vitesse transversale sur la ligne d'arrêt d'un cône;

c , défini par l'équation (17);

$\beta_f, \beta_t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, définis par les relations (10);

δ , facteur d'échelle;

$\Theta_f, \Theta_g, \Theta_t$, épaisseurs transformées,

$$\Theta_f = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\eta$$

$$\Theta_g = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{1-g}{1-g_b} d\eta$$

$$\Theta_t = - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta;$$

$\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_t$, épaisseurs transformées,

$$\Gamma_f = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) d\eta$$

$$\Gamma_g = \int_0^\infty \frac{1 - g}{1 - g_b} d\eta$$

$$\Gamma_t = - \int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta;$$

$\Delta_f, \Delta_g, \Delta_t$, épaisseurs transformées,

$$\Delta_f = \int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) d\eta$$

$$\Delta_g = \int_0^\infty \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{1 - g}{1 - g_b} d\eta$$

$$\Delta_t = - \int_0^\infty \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 d\eta;$$

σ , coefficient de pondération des itérations;

n , ordre d'itération.

Subscripts

e , écoulement extérieur;
 b , valeur à la paroi;
 $*$, valeur de référence.

1. INTRODUCTION

Dans un problème de couche limite tridimensionnelle sur une surface régulière, les méthodes de résolution par différences finies ne sont praticables qu'avec des ordinateurs puissants et de ce fait les solutions numériques sont peu nombreuses [1-3]. Dans la pratique, fréquemment l'écoulement n'est que faiblement tridimensionnel et l'approximation de faible écoulement transversal apporte des simplifications importantes tout en se justifiant par des résultats éprouvés (voir par exemple [4]), même

en compressible avec transfert de chaleur. Cependant l'écoulement transversal se trouve souvent surestimé et il est naturel de vouloir améliorer cette approximation en la considérant comme le point de départ d'une méthode de perturbation. On peut envisager soit le développement en série asymptotique [5, 6] soit l'itération [7-9]. La méthode itérative présente l'avantage d'un algorithme plus simple, s'adapte mieux au calcul automatique et peut conduire à la solution exacte. Il convient à ce propos de souligner que seuls les termes du premier ordre ont été étudiés dans une série asymptotique. Ici nous nous proposons d'utiliser une méthode itérative pour étudier dans un cas concret, l'effet du transfert de chaleur sur la couche limite laminaire tridimensionnelle. Il est intéressant en particulier d'examiner si les itérations convergent, avec quelle rapidité la limite est éventuellement atteinte et dans quelle mesure il est possible d'accélérer les convergences. Par rapport à une méthode de différences finies, une méthode itérative est sans doute plus rapide et plus souple surtout quand l'écoulement transversal est faible car le nombre d'itérations peut être choisi en fonction de la précision désirée.

Nous avons considéré comme application le cas simple du cône en incidence dans un écoulement supersonique. La symétrie conique permet de réduire de trois à deux le nombre de variables indépendantes des équations tout en conservant le caractère tridimensionnel de la couche limite. Il est possible en particulier, en modifiant l'incidence, de contrôler l'intensité du gradient de pression transversal, d'obtenir un changement de signe de ce gradient suivi d'un décollement si l'incidence devient suffisante. La méthode de différences finies est dans ce cas, simple à mettre en oeuvre et nous disposons de solutions de comparaison [10-13]. L'écoulement extérieur a aussi été calculé par des méthodes numériques dans le cas où l'incidence n'est pas trop élevée [14, 15]. Nous nous trouvons dans un cas où la solution numérique de l'écoulement tridimensionnel est entièrement connue et constitue un bon test pour les méthodes

approchées. L'approximation de faible écoulement transversal a été utilisée et contrôlée dans ce cas [16-19].

L'étude expérimentale de l'écoulement sur un cône se présente elle aussi de manière favorable car, à l'exception du voisinage de la pointe et du culot de la maquette, l'écoulement n'est pas perturbé et les conditions de mesures sont proches du modèle théorique. Le nombre d'expériences nécessaires est modéré car l'écoulement extérieur est entièrement défini par une seule mesure de répartition de pression en azimut. Egalement, pour des raisons de similitude, les mesures de flux de chaleur et de direction des lignes de courant peuvent être effectuées en un point par azimut. Soulignons que, pour de grandes incidences avec décolllement à l'extrados, l'écoulement extérieur ne peut être déterminé qu'expérimentalement.

Après avoir construit les équations itératives dans le cas général et proposé une méthode intégrale de résolution § 2, les simplifications apportées dans le cas du cône sont données § 3. Les conditions expérimentales sont exposées § 4 et le § 5 est consacré à la discussion des résultats numériques et expérimentaux obtenus.

2. EQUATIONS ITERATIVES

Dans un système de coordonnées lié aux lignes de courant extérieures s, z, y où s est dirigé suivant une ligne de courant extérieure, z la direction orthogonale et y la normale à la surface, avec comme éléments de longueurs $e_1(s, z), e_2(s, z)$, les équations de la couche limite s'écrivent [20]

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho u e_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v e_1 e_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w e_1) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u}{e_1} \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{e_2} \frac{\partial u}{\partial z} - K_2 uw + K_1 w^2 \right) \\ = \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{u}{e_1} \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{e_2} \frac{\partial w}{\partial z} - K_1 uw + K_2 u^2 \right)$$

$$= \rho_e u_e^2 K_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u}{e_1} \frac{\partial H}{\partial s} + v \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{w}{e_2} \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

La vitesse transversale w étant de l'ordre de grandeur de la courbure géodésique K_2 des lignes de courant extérieures d'après l'équation (3), si K_2 est faible, on peut négliger w dans les équations (1), (2) et (4), qui sont alors celles de la couche limite bidimensionnelle. En ne retenant dans l'équation (3) que les termes linéaires en w on obtient l'approximation de faible écoulement transversal. Cette approximation peut servir de point de départ d'une résolution itérative. En effet, on peut envisager des équations itératives qui contiennent les principales simplifications de cette approximation:

(a) En supposant connus grâce à l'itération précédente, toutes les dérivées en z , on résoud 3 équations non linéaires couplées à 3 inconnues u, w, H à 2 variables indépendantes après avoir éliminé v à l'aide de l'équation de continuité (1), [8].

(b) Si, de plus, les équations itératives sont découpées en supposant connue, grâce aux itérations précédentes, la vitesse transversale w dans les équations se rapportant à u et à H , on obtient un système d'équations non linéaires à 2 inconnues u et H à 2 variables s, y et une équation à une inconnue w non linéaire [7].

(c) On obtient une simplification supplémentaire en linéarisant l'équation de quantité de mouvement transversal.

Il est commode d'introduire le changement de variables

$$\xi = \int_0^s \mu_* \rho_* u_* e_*^2 e_1 ds, \quad \eta = \frac{u_* e_*}{\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (5)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{u_*}, \quad g = \frac{H}{H_*}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{w}{u_*}. \quad (6)$$

Nous supposerons pour simplifier le gaz parfait avec un nombre de Prandtl $Pr = 1$ et une loi de viscosité proportionnelle à la température. Ceci nous conduit aux équations itératives suivantes:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta_f \left[g - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \right\}_{n+1} \\ & = \left[\beta_f \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \right)^2 - \alpha_1 t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \alpha_2 \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\alpha_3 \xi \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \right]_n \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial g}{\partial \eta} - 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \right]_{n+1} \\ & = \left[- \alpha_1 t \frac{\partial g}{\partial \eta} + 2\alpha_3 \xi \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \right]_n \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^3 t}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} - \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial t}{\partial \eta} \right. \\ & \left. - 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 t}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) + \beta_t \left[g - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right\}_{n+1} \\ & = \left[- \beta_t \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \right)^2 - \alpha_1 t \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right. \\ & \left. + 2\alpha_3 \xi \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) \right]_n \quad (9) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_f & = \frac{2\xi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} \frac{H_e}{h_e} \\ \beta_t & = \frac{2\xi}{\partial \xi / \partial s} e_1 \frac{H_e}{h_e} K_2 \\ \alpha_1 & = \frac{2\xi}{\partial \xi / \partial s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{(2\xi)} \frac{e_1}{e_2} \right) \quad (10) \\ \alpha_2 & = \frac{2\xi}{u_e e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (e_2 u_e) \\ \alpha_3 & = \frac{2\xi}{\partial \xi / \partial s} \frac{e_1}{e_2}. \end{aligned}$$

On initie les itérations avec $t_0 = 0$. Les deuxièmes membres des équations (7)–(9) avec $n = 0$ sont nuls. Les équations (7) et (8) sont alors les mêmes qu'en bidimensionnel et l'équation (9) représente l'approximation de faible écoulement transversal. Cette solution f_1, g_1, t_1 est ensuite portée au deuxième membre des équations (7)–(9) pour former les équations d'ordre 2 et le procédé peut alors se répéter indéfiniment. A chaque itération, la résolution par une méthode de différences finies de la couche limite bidimensionnelle pourrait être utilisée car les premiers membres des équations (7) et (8) ne contiennent que deux inconnues f_1, g_1 à 2 variables indépendantes. Il est ensuite possible de résoudre l'équation de l'écoulement transversal (9) qui est linéaire en t . Il faut remarquer que ce ne sont pas les seules équations itératives possibles. Effectivement nous allons les modifier pour tenir compte des résultats obtenus aux itérations précédentes en introduisant un coefficient de pondération σ . Nous verrons dans les applications numériques que cette pondération permet d'obtenir la convergence des itérations même dans les cas d'un écoulement transversal important avec paroi chauffée. Ici nous utilisons une méthode intégrale de résolution. Les équations itératives obtenues par intégration de (7)–(9) compte tenu des conditions aux limites usuelles et de la pondération sont alors:

$$\begin{aligned} & \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \Theta_f) - \Theta_f + \beta_f (\Theta_f + \Gamma_f \right. \\ & \left. - (1 - g_b) \Gamma_g - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)_b \right]_{n+1} \\ & = - (1 - \sigma) \left[\alpha_1 A_f + (\beta_f - \alpha_2) A_t + \alpha_3 \frac{\partial A_f}{\partial z} \right]_n \\ & - \sigma \left[\alpha_1 A_f + (\beta_f - \alpha_2) A_t + \alpha_3 \frac{\partial A_f}{\partial z} \right]_{n-1} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \Theta_g) - \Theta_g - \frac{1}{1 - g_b} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_b \right]_{n+1} \\
&= - (1 - \sigma) \left(\alpha_1 \Delta_g + \alpha_3 \frac{\partial \Delta_g}{\partial z} \right)_n \\
&\quad - \sigma \left(\alpha_1 \Delta_g + \alpha_3 \frac{\partial \Delta_g}{\partial z} \right)_{n-1} \quad (12) \\
& \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \Theta_t) + (\alpha_2 - 1) \Theta_t - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right)_b \right]_{n+1} \\
&= - (1 - \sigma) \left\{ \left[\beta_t (\Theta_f + \Gamma_f - (1 - g_b) \Gamma_g) \right]_{n+1} \right. \\
&\quad + \left[(\beta_t + \alpha_1) \Delta_t + \alpha_3 \frac{\partial \Delta_t}{\partial z} \right]_n \left. \right\} \\
&\quad - \sigma \left\{ \left[\beta_t (\Theta_f + \Gamma_f - (1 - g_b) \Gamma_g) \right]_n \right. \\
&\quad + \left. \left[(\beta_t + \alpha_1) \Delta_t + \alpha_3 \frac{\partial \Delta_t}{\partial z} \right]_{n-1} \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

En raison de son rôle prépondérant dans l'équation de quantité de mouvement transversal, on a pondéré également le terme de gradient de pression transversal.

Afin de pouvoir intégrer ces équations par rapport à ζ , il est nécessaire de définir la représentation des profils pour relier les paramètres de transfert aux épaisseurs de couche limite. Dans l'application qui suit, une représentation simple découpée à un paramètre libre pour chacun des profils a été utilisée. Le profil de vitesse longitudinale est exprimé à l'aide d'un polynôme du 2e degré de la fonction de Blasius $u_B(\eta/\delta)$ avec un facteur d'échelle δ , et un polynôme du 4e degré est utilisé pour l'enthalpie et pour la vitesse transversale.

Compte tenu des conditions à l'infini et des conditions de compatibilité à la paroi en nombre suffisant, ces représentations s'écrivent:

$$\frac{u}{u_e} = 1 + \frac{\beta_t g_b \delta^2}{2u_B'^2} (u_B - u_B^2) \quad (14)$$

$$\frac{g - g_b}{1 - g_b} = \frac{g_b \delta}{(1 - g_b) u_B'} u_B (u_B - u_B^2) + u_B^4 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{u_e} &= \frac{t_b'' \delta}{u_B'} (u_B - u_B^4) - \frac{\beta_t g_b}{2u_B'^2} (u_B^2 - u_B^4) \\
&\quad - \frac{\beta_t g_b}{6u_B'^3} (u_B^3 - u_B^4) + u_B^4 \quad (16)
\end{aligned}$$

avec $u_B' = 0,4696$.

Les paramètres libres pour ces 3 profils sont respectivement δ , g_b' et t_b'' . Afin de contrôler la validité de cette représentation de profils, nous avons calculé à l'aide des expressions (14) et (15) les solutions semblables de la couche limite bidimensionnelle avec $\beta_f = \text{cte}$ et $g_b = \text{cte}$. La comparaison avec les solutions exactes dans ce cas [21] fait apparaître des résultats convenables pour le frottement longitudinal et le transfert de chaleur à condition que le gradient de pression β_f reste modéré. Pour de grandes valeurs de β_f ou de g_b (paroi à température élevée), il n'y a pas de solution et cette représentation ne convient pas. Dans l'application numérique sur le cône, § 3, les valeurs de β_f restent toujours suffisamment modérées pour justifier le choix de cette représentation. Pour l'écoulement transversal, nous avons comparé avec les solutions semblables de l'équation linéarisée qui correspond à un gradient de pression transversal tel que:

$$\frac{2\zeta}{e_2 u_e \beta_t} \frac{d(e_2 u_e \beta_t)}{d\zeta} = \text{cte} = \varepsilon. \quad (17)$$

La présente représentation conduit par rapport à la solution linéarisée à une surestimation de l'épaisseur de quantité de mouvement transversal. Une autre représentation par un polynôme du 3e degré en $u_B(\eta/\delta)$ pour l'écoulement longitudinal a également été utilisé pour les applications numériques sur le cône. Les paramètres δ et g_b' sont alors déterminés par 2 équations couplées. Les résultats obtenus ne sont pas bien différents de ceux que fournissent la représentation plus simple (14)–(16).

3. APPLICATION AUX SURFACES CONIQUES

Nous allons appliquer la méthode itérative au cas des surfaces coniques. Si $K\phi$ représente

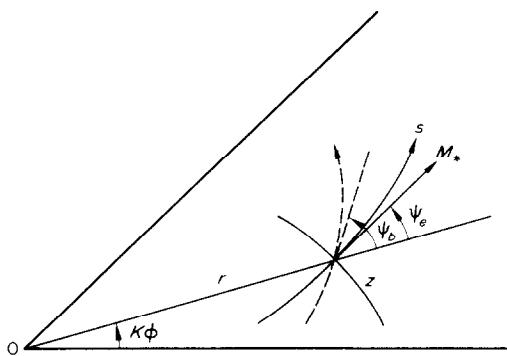


FIG. 1. Système de coordonnées sur un cône développé.

l'angle polaire en radian sur le cône développé, l'écoulement extérieur à la couche limite est entièrement connu en fonction de la seule variable ϕ . L'angle d'une ligne de courant extérieure $\psi_e(\phi)$ avec la génératrice permet de déterminer les lignes de courant et leurs normales dans le système de coordonnées polaire r, ϕ , par leurs équations respectives (Fig. 1):

$$\frac{dr}{Kr d\phi} = \cotg \psi_e \text{ et } \frac{dr}{Kr d\phi} = - \tg \psi_e \quad (18)$$

d'où

$$r = z e^{I(\phi)} \text{ avec } I(\phi) = K \int_{\phi_0}^{\phi} \cotg \psi_e d\phi \quad (19)$$

$$r = s e^{-J(\phi)} \text{ avec } J(\phi) = K \int_{\phi_0}^{\phi} \tg \psi_e d\phi$$

ϕ_0 étant une constante d'intégration. On définit ainsi un système de coordonnées s, z dont la métrique obtenue en calculant l'élément de longueur $ds^2 = e_1^2 ds^2 + e_2^2 dz^2$ ne dépend que de ϕ

$$e_1 = e^{-J(\phi)} \cos \psi_e, \quad e_2 = e^{I(\phi)} \sin \psi_e \quad (20)$$

Il est plus commode d'utiliser les coordonnées ϕ, z au lieu de s, z . Les formules de transformation sont:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_z \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_z \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_s = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_\phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_s$$

avec d'après (18) et (19)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_s &= \frac{\sin \psi_e \cos \psi_e}{Kr e^J} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s &= - \frac{\sin \psi_e \cos \psi_e}{Kz} \end{aligned} \quad (22)$$

On peut exprimer ξ en fonction de z et ϕ d'après (5), (20) et (22). En supposant l'écoulement extérieur isentropique et compte tenu de la loi de gaz parfait et d'une loi de viscosité proportionnelle à la température, on a

$$\xi = cKz \int_0^\phi \frac{p(\phi)}{P_t} M_*(\phi) e_2^2(\phi)$$

$$\frac{e^{I(\phi)}}{\sin \psi_e(\phi)} d\phi = cKz \bar{\xi}(\phi) \quad (23)$$

où c est une constante qui ne joue aucun rôle. Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_f, \beta_t$ définis par (10) se transforment d'après les relations (19)–(23) en:

$$\left. \begin{aligned} \beta_f &= \frac{2\xi}{d\xi/d\phi} \frac{H_e}{h_e} \frac{1}{M_*} \frac{dM_*}{d\phi} \\ \beta_t &= - \frac{2H_e}{h_e} \frac{1}{M_*(p/p_t)} \frac{(\psi'_e + K) \bar{\xi} \sin^2 \psi_e}{e_2^3} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{(p/p_t) M_* e_2^3} \left((2\psi'_e + K) \bar{\xi} - \right. \\ &\quad \left. \frac{d\bar{\xi}}{d\phi} \sin \psi_e \cos \psi_e \right) \\ \alpha_2 &= \frac{2\bar{\xi}}{d\bar{\xi}/d\phi} (\psi'_e + K) \cotg \psi_e \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \phi} (\log M_*) \\ \alpha_3 &= \frac{2Kz \bar{\xi}}{(p/p_t) M_* e_2^3} \quad \text{où} \quad \psi'_e = d\psi_e/d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Les expressions précédentes remplacées dans (11)–(13) montrent bien que ces équations sont indépendantes de z et on retrouve donc bien la symétrie conique.

Sur la ligne d'arrêt, ϕ tend vers 0, le paramètre de gradient de pression transversal β_i tend vers 0, la vitesse transversale tend vers 0 et le coefficient α_3 tend vers l'infini. En définissant $t = \beta_i \bar{t}$, $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3 \beta_i$ et en surlignant les épaisseurs prises par rapport à \bar{t} au lieu de t , nous obtenons la forme limite des équations (11)–(13)

$$\left[\Theta_f - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)_{b_{n+1}} \right] = (1 - \sigma) [-\bar{\alpha}_3 \bar{A}_f]_n + \sigma [-\bar{\alpha}_3 \bar{A}_f]_{n-1} \quad (25)$$

$$\left[\Theta_g - \frac{1}{1 - g_b} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_{b_{n+1}} \right] = (1 - \sigma) [-\bar{\alpha}_3 \bar{A}_g]_n + \sigma [-\bar{\alpha}_3 \bar{A}_g]_{n-1} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{\Theta}_t + \varepsilon \bar{\Theta}_i - \bar{t}_b'' + (1 - \sigma) \\ & \times (\Theta_f + \Gamma_f - (1 - g_b) \Gamma_g)]_{n+1} \\ & = [(1 - \sigma) (-2\bar{\alpha}_3 \bar{A}_i) \\ & - \sigma (\Theta_f + \Gamma_f - (1 - g_b) \Gamma_g)]_n \\ & + \sigma [-2\bar{\alpha}_3 \bar{A}_i]_{n-1} \end{aligned} \quad (27)$$

où ε défini par (17) prend la forme limite $\varepsilon = \frac{2}{3}(1 + 3k)/(1 + k)$.

k est le paramètre habituel de gradient de vitesse transversale sur la ligne de séparation d'une surface conique

$$k = \frac{2}{3K} (\psi'_e)_{\phi=0}.$$

A chaque itération les équations (11)–(13) transformées en variable ϕ sont intégrées en ϕ croissant à l'aide des corrélations (14)–(16), les conditions initiales étant données par les équations (25)–(27). L'ensemble du calcul a été programmé sur un ordinateur CDC 3600 avec comme données la répartition de pression $p(\phi)/p_i$ et g_b . Après un lissage de la répartition de pression, les intégrations numériques des équations d'Euler de l'écoulement extérieur sur

le cône puis des équations intégrales de la couche limite sont effectuées par la méthode Runge–Kutta 2e approximation. Les résultats numériques pour un cône circulaire de $\frac{1}{2}$ angle 10° sont donnés au paragraphe suivant et le temps de calcul pour obtenir la 6e itération est en moyenne de $30'$ avec un pas de $\phi = 1^\circ$ en angle méridien.

Il est également intéressant de résoudre le système d'équations différentielles itératives sur la ligne d'arrêt car dans ce cas, la solution exacte est connue [22] et la méthode itérative constitue elle-même une méthode exacte sous réserve de convergence. La forme limite des équations (7)–(9) après pondération est dans ce cas:

$$\begin{aligned} [f''' + ff'']_{n+1} &= (1 - \sigma) [-\bar{\alpha}_3 f'' \bar{t}]_n \\ &+ \sigma [-\bar{\alpha}_3 f'' \bar{t}]_{n-1} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [g'' + fg']_{n+1} &= (1 - \sigma) [-\bar{\alpha}_3 g' \bar{t}]_n \\ &+ \sigma [-\bar{\alpha}_3 g' \bar{t}]_{n-1} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [\bar{t}''' + f\bar{t}'' - \varepsilon f'\bar{t}' + (1 - \sigma)(g - f'^2)]_{n+1} \\ = [(1 - \sigma) \alpha_3 (\bar{t}'^2 - \bar{t}\bar{t}'') - \sigma(g - f'^2)]_n \\ + \sigma [\bar{\alpha}_3 (\bar{t}' - \bar{t}'' \bar{t})]_{n-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

A chaque itération n , ces équations sont résolues par une méthode standard. Les résultats numériques sont discutés plus loin.

4. EXPERIENCES SUR UN CONE CIRCULAIRE

Un moyen simple de contrôler l'intensité de l'écoulement transversal sur un cône est de faire varier la valeur du gradient de pression transversal en modifiant l'incidence de la maquette. Cette intensité dépend également de la température de paroi. Des essais ont été entrepris sur un cône circulaire pour étudier l'influence de ces paramètres [23].

Une série d'expériences a donc été effectuée sur un cône de $\theta_c = 10^\circ$ de $\frac{1}{2}$ angle, de 7 cm de long dans une soufflerie à rafale au nombre de Mach 3,42 avec un nombre de Reynolds rapporté aux conditions à l'infini de $8 \cdot 10^4$ par cm, aux incidences de $i = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 11^\circ, 13^\circ, 15^\circ$ et pour

chacune de ces incidences, nous avons imposé les températures de paroi variant de 80°K à 475°K correspondant à des valeurs de g_b de 0,40, 0,70, 1,00, 1,37, 1,64, la température génératrice maintenue constante au cours d'une rafale étant dans tous les cas de 290°K. Pour une incidence et une température de paroi donnée, les mesures de pression statique, d'angles de lignes de courant pariétales et de transfert de chaleur sont faites à r constant, à mi-distance entre pointe et culot et en fonction de l'angle d'azimut ϕ . La pression d'arrêt isentropique sur l'obstacle est déterminée par la mesure de l'angle θ_s de la génératrice du choc la plus inclinée par rapport au vent, cet angle θ_s est fonction de l'incidence du cône mais l'expérience montre qu'il n'est pas sensible à la température de paroi.

La pression est mesurée sur 2 maquettes, la première peut être chauffée extérieurement par une résistance électrique avec dispositif de régulation, l'autre comporte un système de refroidissement intérieur d'air liquide. Ces deux maquettes ont chacune une prise de pression de 0,5 mm de diamètre avec une épaisseur de paroi importante afin que l'inertie thermique soit suffisante pour que la température de paroi varie peu au cours d'une rafale de 5 à 6 s. Les pressions $p(\phi)$ sont mesurées en 3 ou 4 s avec une précision de 0,7 pour cent dans les cas les plus défavorables. La pression totale p_t est connue grâce à la mesure de l'angle de la génératrice de choc θ_s et de la pression génératrice de la soufflerie voisine de la pression atmosphérique. Le rapport $p(\phi)/p_t$ est finalement connu avec une précision de 0,8 pour cent.

Les mesures des lignes de courant pariétales ont été faites à l'aide d'enduits, l'enduit étant choisi en fonction de la température de paroi de façon à ce qu'il soit liquide à cette température imposée et qu'il ait une très faible tension de vapeur. Après la fin de la rafale due à la fermeture d'un obturateur placé au col de la tuyère, la direction des lignes de courant pariétales $\psi_b(\phi)$ est relevée à $\pm 2^\circ$ par une lunette de visée avec réticule et montée sur un vernier.

Dans les mêmes conditions d'essais, les mesures de transfert de chaleur par la méthode de paroi mince ont nécessité la réalisation de deux maquettes de 0,25 mm d'épaisseur de paroi avec fils de thermocouple Chromel Alumel de 0,1 mm soudés à l'intérieur. La première maquette est chauffée par rayonnement à l'aide de résistances électriques placées dans la maquette; la deuxième est refroidie par une circulation d'air liquide. Dans les deux cas, la maquette préalablement mise à température désirée en dehors de l'écoulement est injectée après amorçage de la soufflerie. La mesure de la pente initiale de la courbe représentant la température locale de paroi en fonction du temps permet de déterminer le coefficient de transfert défini par

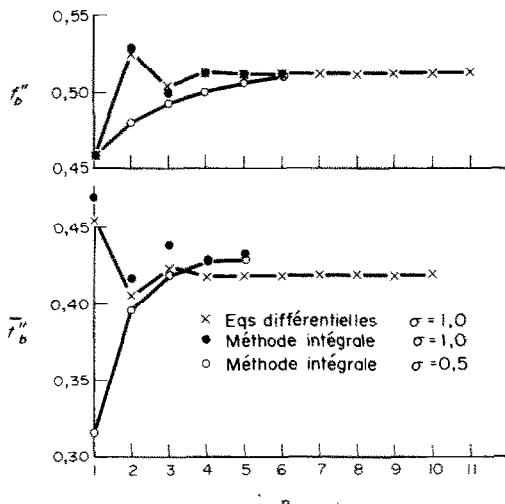
$$\alpha = \text{cte} \left(\frac{(\partial T_b / \partial t)}{T_b - T_r} \right)_{t \rightarrow 0}$$

où T_r est la température de récupération calculée à partir du nombre de Mach local avec un facteur de récupération supposé égal à $r = \sqrt{Pr} = \sqrt{0,72}$. L'imprécision sur la capacité calorifique de la paroi mince surtout pour les basses températures et sur son épaisseur, est atténuée en rapportant α à sa valeur $\alpha_{i=0}$ sur le cône sans incidence pour la même température locale. Malgré cela la précision est médiocre en raison de la faible taille de la maquette et plus particulièrement lorsque la paroi est refroidie. La précision sur $\alpha/\alpha_{i=0}$ est estimée à ± 20 pour cent.

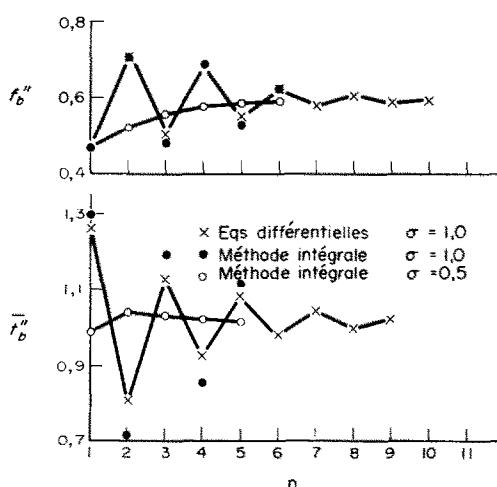
5. RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

5.1 Convergence

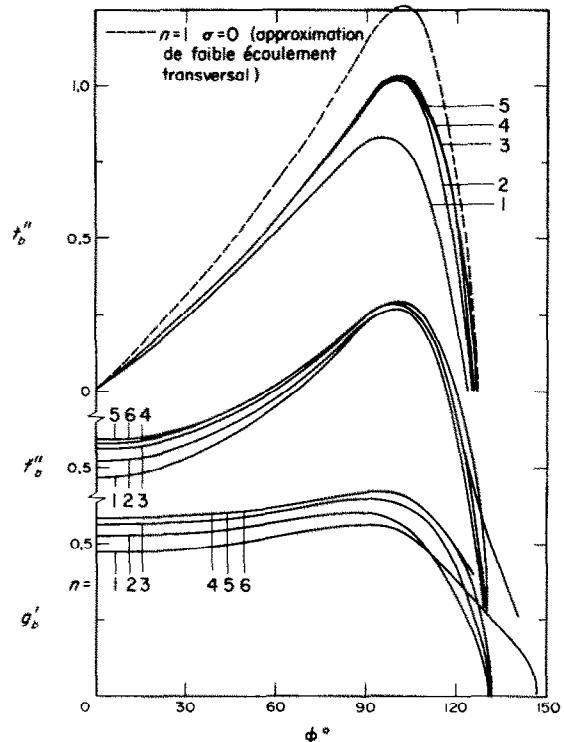
La Fig. 2a représente un exemple de résultat obtenu sur la ligne d'arrêt pour un cas de gradient de pression transversal modéré. La méthode itérative appliquée aux équations différentielles avec $\sigma = 0$ (non pondéré) restitue les valeurs exactes avec une convergence rapide et alternée. Il en est de même pour les équations intégrales non pondérées et, bien qu'il s'agisse d'une méthode approchée, les valeurs limites sont

FIG. 2a. Itérations sur la ligne d'arrêt, $i = 5^\circ$, $g_b = 0,4$.

correctes. Le coefficient de frottement transversal f_b'' à la première itération $n = 1$ est celui de l'approximation de faible écoulement transversal, il apparaît bien sur la figure que ce coefficient est surestimé. La pondération $\sigma = 0,5$ accélère la convergence qui, cependant, n'est plus alternée. Si le gradient de pression transversal devient intense avec paroi chauffée, les conclusions (Fig. 2b) sont analogues, la convergence bien que moins rapide est encore assurée au bout de 5 à 6 itérations pour $\sigma = 0,5$. Sur la surface du cône, dans un cas sévère, les

FIG. 2b. Itérations sur la ligne d'arrêt, $i = 15^\circ$, $g_b = 1,64$.

itérations appliquées aux équations intégrales divergent au delà du maximum du paramètre de gradient de pression transversale. Avec pondération ($\sigma = 0,5$), la convergence est obtenue jusqu'au décollement au bout de 6 itérations. La Fig. 3 représente les paramètres

FIG. 3. Convergence des itérations sur la surface du cône, $i = 15^\circ$, $g_b = 1,64$, $\sigma = 0,5$.

de transfert à la paroi pour ce cas. L'approximation de faible écoulement transversal conduit à une surestimation de 25 pour cent environ pour le frottement transversal et par contre une sousestimation de 12 pour cent environ du transfert de chaleur et du frottement longitudinal.

5.2 Comparaison avec une méthode numérique

Le transfert de chaleur sur un cône à un nombre de Mach 5 a été calculé par une méthode de différences finies pour diverses incidences dans [11]. La Fig. 4 représente la comparaison de ces résultats avec ceux de la présente méthode,

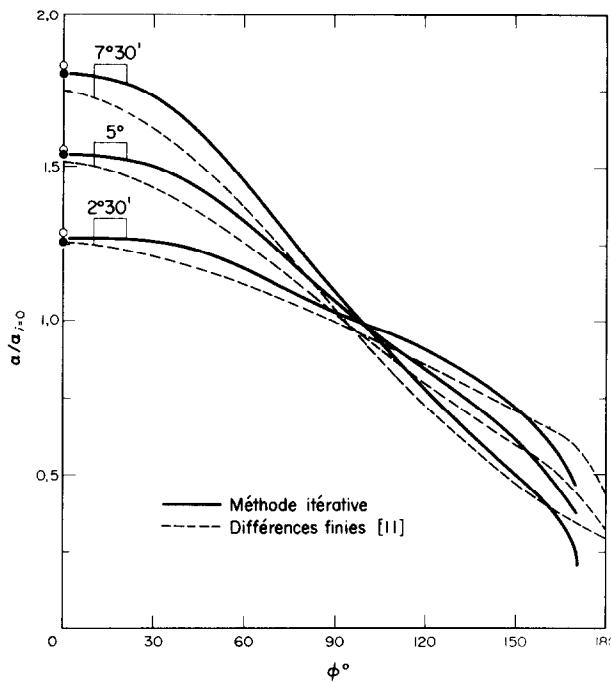


FIG. 4a. Répartition du coefficient de transfert de chaleur théorique
Comparaison avec une méthode de différences finies, $M + 5$,
 $\theta_c = 10^\circ$, $g_b = 0.38$, \circ k théorique, \bullet k expérimental.

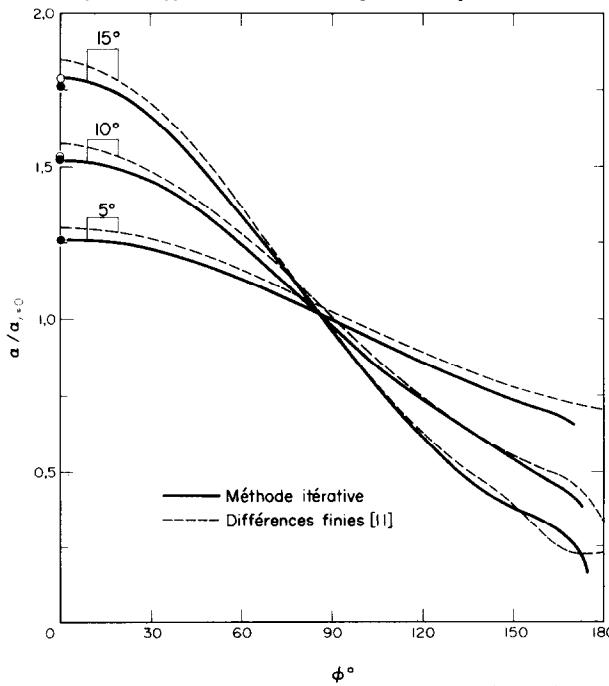


FIG. 4b. Répartition du coefficient de transfert de chaleur théorique
Comparaison avec une méthode de différences finies, $M = 5$,
 $\theta_c = 20^\circ$, $g_b = 0.38$, \circ k théorique, \bullet k expérimental.

l'écoulement extérieur étant déduit des répartitions de pression des tables de Jones [15]. L'accord peut être considéré comme satisfaisant. Sur la ligne de séparation d'intrados, l'écart provient non seulement des 2 méthodes de résolution différentes mais surtout de la détermination imprécise du gradient de pression transversal k à partir de la répartition de pression. Sur la même figure, à titre de comparaison, on a

5.3 Comparaison avec les expériences

Pour de faibles incidences et en l'absence de décollement, la répartition théorique de pression sur un cône a été tabulé [14, 15]. La Fig. 5 montre le bon accord de la théorie et des présentes mesures. A 10° , le décollement apparaît, l'écoulement extérieur ne peut être déterminé qu'au moyen d'expériences et il est possible que la température de paroi ait quelque

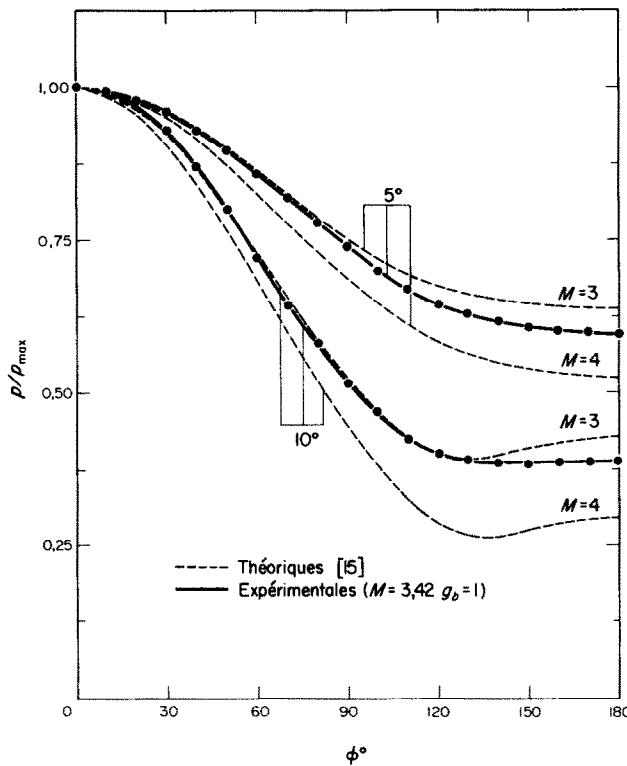
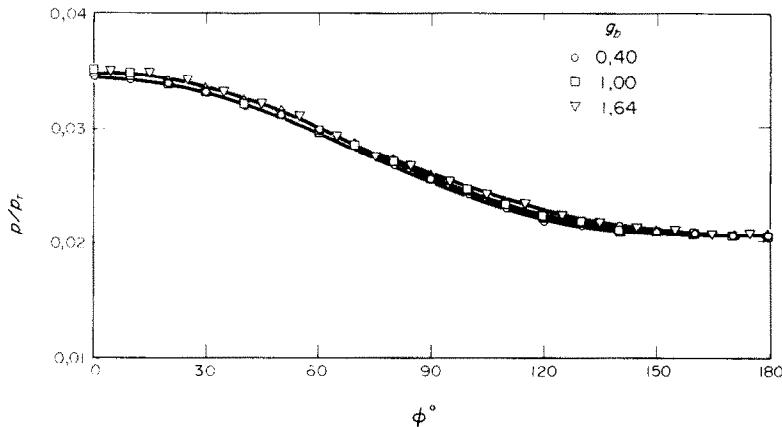


FIG. 5. Répartition de pression théorique et expérimentale aux faibles incidences.

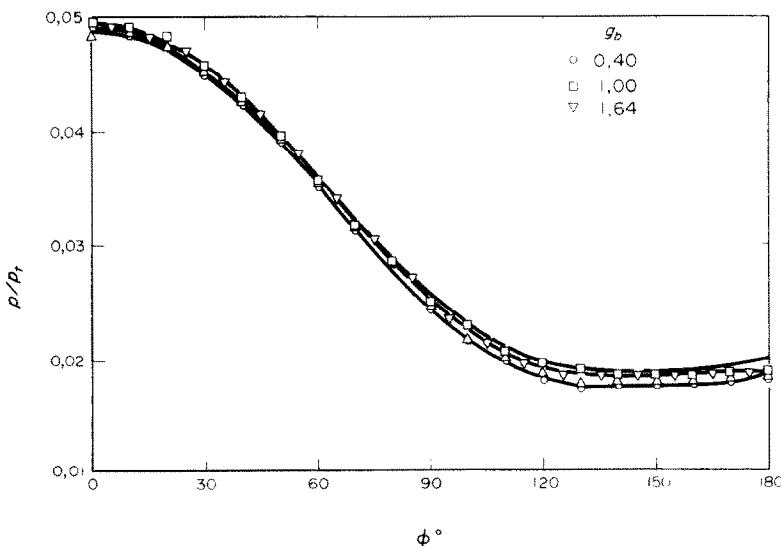
représenté les valeurs du coefficient de transfert de chaleur déduit de la référence [22] correspondant à k donné par Jones [15] et celui obtenu par la méthode de lissage présentement utilisée. La dispersion est du même ordre. Au voisinage de la ligne d'extrados, les courbes ne tendent pas vers un minimum à tangente horizontale. Il semble qu'il faille porter une attention particulière dans cette région [12].

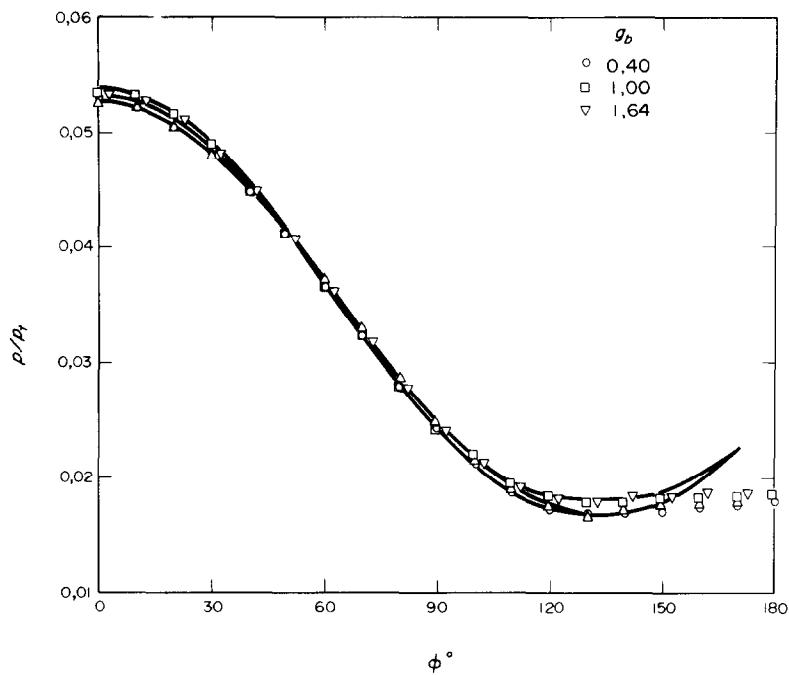
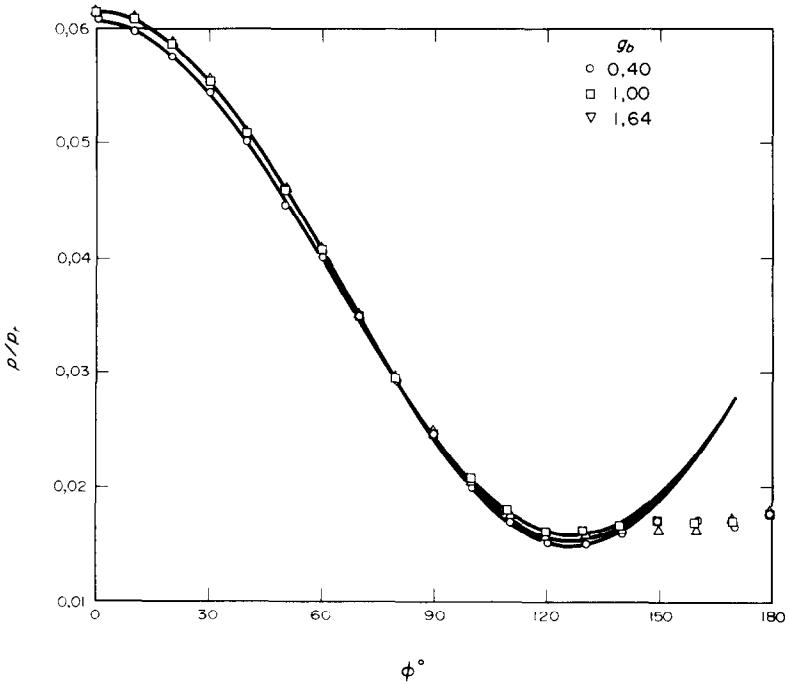
influence sur la zone décollée qui réagit sur l'écoulement extérieur. La répartition de pression a donc été mesurée pour les différentes températures de paroi considérées et les résultats sont présentés Fig. 6. En général, la pression diminue avec la température de paroi sans doute à cause de l'amincissement de la couche limite mais cet effet n'est pas toujours aisément décelable sur tous les résultats expérimentaux.

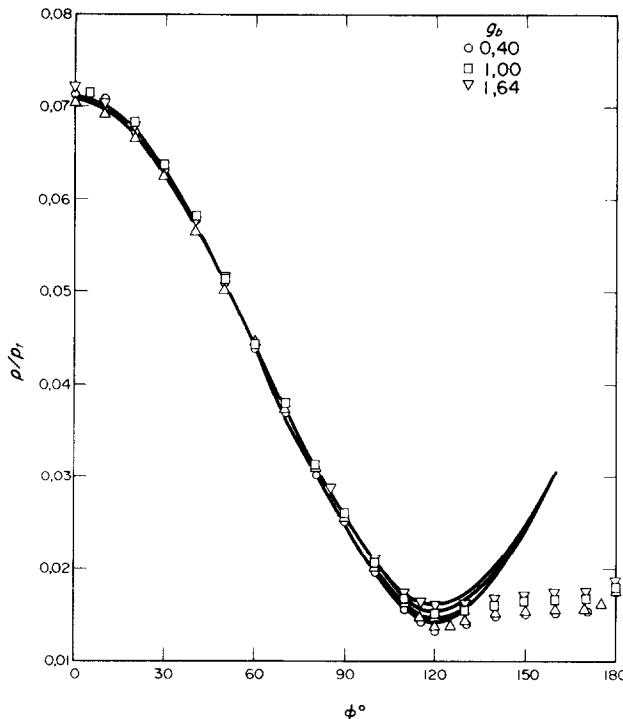
FIG. 6a. Répartition de pression expérimentale, $i = 5^\circ$

Cette diminution est beaucoup plus nette au voisinage du minimum sans que la position de ce dernier en soit affectée, ce qui semble indiquer que la position du décollement n'est pas très sensible au transfert de chaleur. Sur cette même figure, les courbes en trait plein représentent le résultat du lissage utilisé avec une série trigonométrique à 5 termes de la partie entre $\phi = 0$ et ϕ_{\min} correspondant au minimum de pression. Ce lissage n'est donc pas valable dans la zone décollée.

La direction ψ_b des lignes de courant pariétales par rapport aux génératrices du cône, mesurée et calculée, est représentée Fig. 7 ainsi que la direction ψ_e des lignes de courant extérieures obtenues par intégration des équations d'Euler. La différence $\psi_b - \psi_e$ indique l'intensité de l'écoulement transversal. L'augmentation de cette intensité avec l'incidence et la température est claire sur les Figs. 7a-e. Les courbes théoriques correspondent à l'itération d'ordre 6. En général, le calcul donne des déviations ψ_μ plus im-

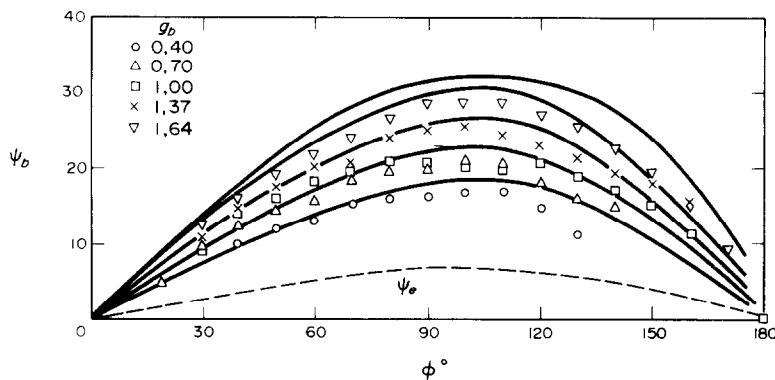
FIG. 6b. Répartition de pression expérimentale, $i = 10^\circ$.

FIG. 6c. Répartition de pression expérimentale, $i = 11^\circ$.FIG. 6d. Répartition de pression expérimentale, $i = 13^\circ$.

FIG. 6e. Répartition de pression expérimentale, $i = 15^\circ$.

portantes que les mesures. Il est possible d'une part que ces valeurs mesurées soient par défaut à cause de l'inertie et de l'épaisseur de l'enduit de visualisation et d'autre part que les valeurs théoriques soient par excès sans doute à cause des représentations de profil utilisées. En effet, la représentation des profils transversaux

donnait une surestimation par rapport à la solution semblable linéaire (§2). Dans l'ensemble, l'accord peut être considéré comme satisfaisant jusqu'au décollement $\psi_b = 0$. La position du décollement mesurée est assez précise si l'incidence dépasse 10° mais incertaine à 10° même. Remarquons que la position de décollement

FIG. 7a. Direction des lignes de courant pariétales théoriques et expérimentales, $i = 5^\circ$.

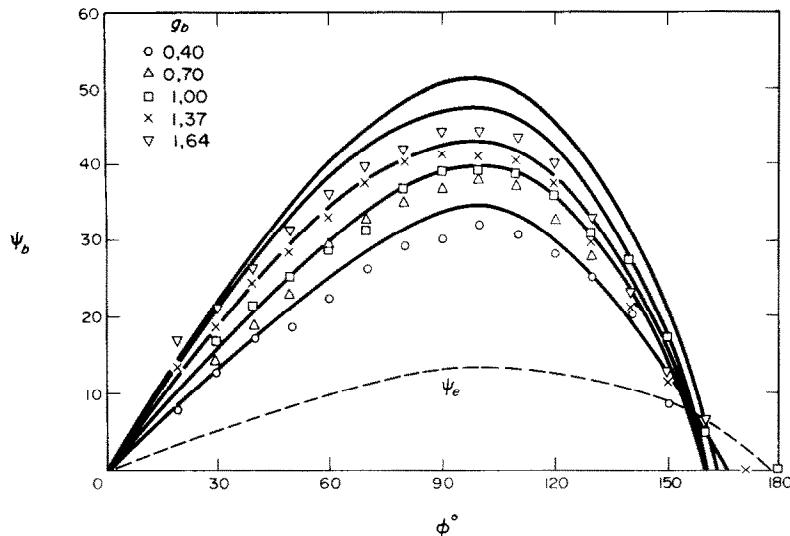


FIG. 7b. Direction des lignes de courant pariétales théoriques et expérimentales, $i = 10^\circ$.

ment théorique a été calculée à l'aide de la répartition de pression lissée qui surestime le gradient de pression défavorable. La position de ce décollement varie avec l'incidence mais la température n'a pas d'influence facilement décelable.

Les coefficients de transfert de chaleur $\alpha(\phi)$ théoriques et expérimentaux rapportés à leurs

valeurs à l'incidence nulle $\alpha_{i=0}$ pour la même température de paroi sont représentés Fig. 8. Bien que l'influence de la température de paroi soit en partie contenue dans $\alpha_{i=0}$, elle est encore apparente dans le sens d'une augmentation de $\alpha/\alpha_{i=0}$ avec g_b dans la zone d'intrados quand l'incidence augmente. Le croisement des courbes théoriques pour $i = 5^\circ$ et 10° peut provenir de

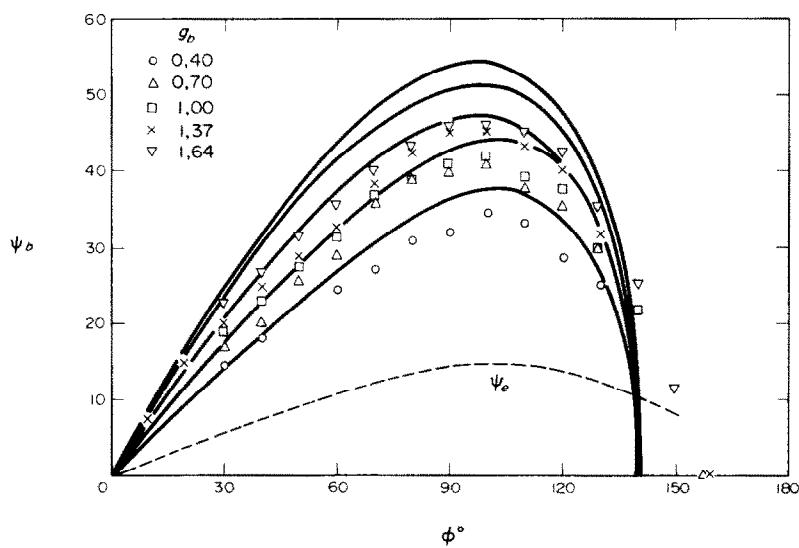


FIG. 7c. Direction des lignes de courant pariétales théoriques et expérimentales, $i = 11^\circ$.

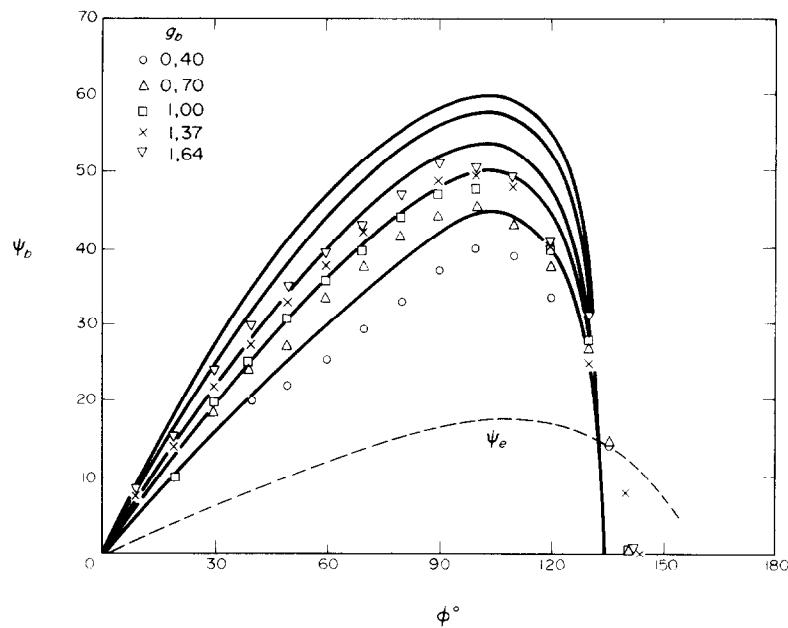


FIG. 7d. Direction des lignes de courant pariétales théoriques et expérimentales,
 $i = 13^\circ$.

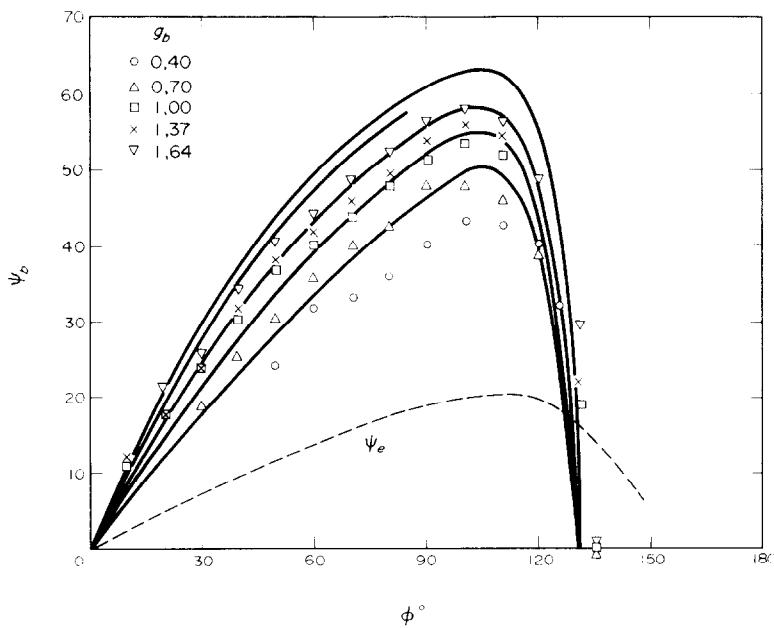


FIG. 7e. Direction des lignes de courant pariétales théoriques et expérimentales,
 $i = 15^\circ$.

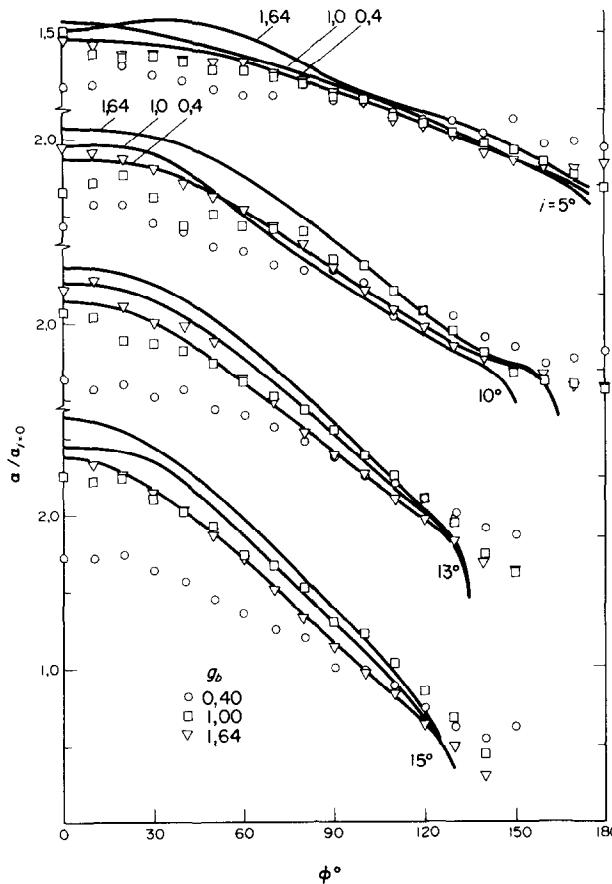


FIG. 8. Répartition théorique et expérimentale du coefficient de transfert de chaleur.

la marge d'erreur commise dans la répartition de pression mesurée et lissée pour le calcul de l'écoulement extérieur. En général, le coefficient de transfert de chaleur mesurée est plus faible que la valeur théorique au voisinage de la ligne d'intrados $\phi = 0$ surtout pour le cas à paroi refroidie $g_b = 0,40$. Cet écart doit sans doute être imputé en bonne partie aux erreurs de mesure.

5.4 Reconstitution des profils

Les équations de la couche limite une fois intégrées, les représentations (14)–(16) permettent de reconstituer les profils de vitesse et d'enthalpie. Un exemple de ces profils est montré Fig. 10 pour le cas $i = 15^\circ$ $g_b = 1,64$

correspondant à un écoulement transversal intense. Les paramètres de gradients de pression longitudinal β_f et transversal β_t tracés Fig. 9 présentent dans ce cas un maximum vers $\phi = 100^\circ$ au delà duquel les itérations étaient divergentes sans pondération ($\sigma = 0$). Le point $\phi = 120^\circ$ où les deux gradients de pression β_f et β_t s'annulent, correspond au minimum de pression donc au point d'inflexion des lignes de courant extérieures. Les profils de vitesse longitudinale et d'enthalpie reconstitués et représentés en ϕ croissant (Fig. 10) sont analogues à ceux d'une couche limite bidimensionnelle. On peut noter leur évolution relativement rapide à l'approche du décollement qui a lieu pour ce cas à $127^\circ 5$. Le profil de vitesse transversale

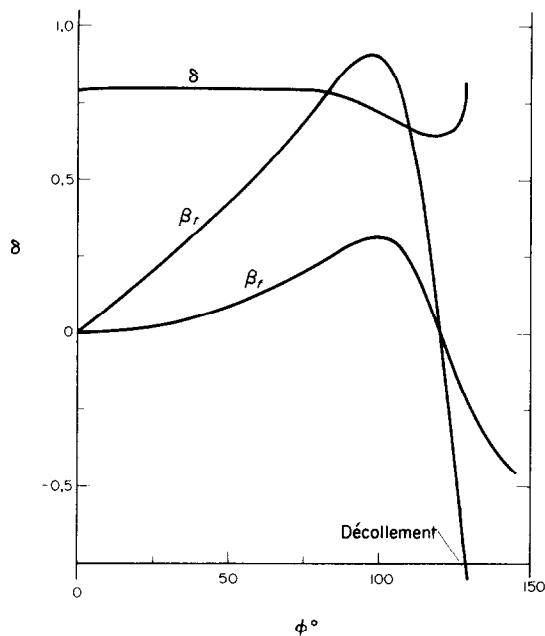


FIG. 9. Répartition des gradients de pression longitudinale et transversale et du facteur d'échelle, $i = 15^\circ$, $g_b = 1,64$.

(Fig. 10) montre que l'écoulement transversal croît en intensité en même temps que le gradient β_t . Au delà de $\phi = 100^\circ$, β_t diminue et il y a relaxation de l'écoulement transversal. β_t devient négatif au point d'infexion $\phi = 120^\circ$. Le profil transversal s'inverse en partant de la paroi avec un certain retard. En effet le frottement transversal t_b'' ne s'annule qu'à $\phi = 127^\circ$ juste avant le décollement. Le facteur d'échelle δ , calculé et représenté Fig. 8, tend vers l'infini à 129° . Sans doute à cause de la méthode de lissage de la répartition de pression, le gradient β_f négatif devient trop important et la représentation de vitesse longitudinale n'est plus valable (voir §2). La reconstitution des profils pour les autres cas montre que l'intensité de l'écoulement transversal dépend largement de l'incidence et de la température de paroi comme l'indique la déviation des lignes de courant pariétales (Fig. 7).

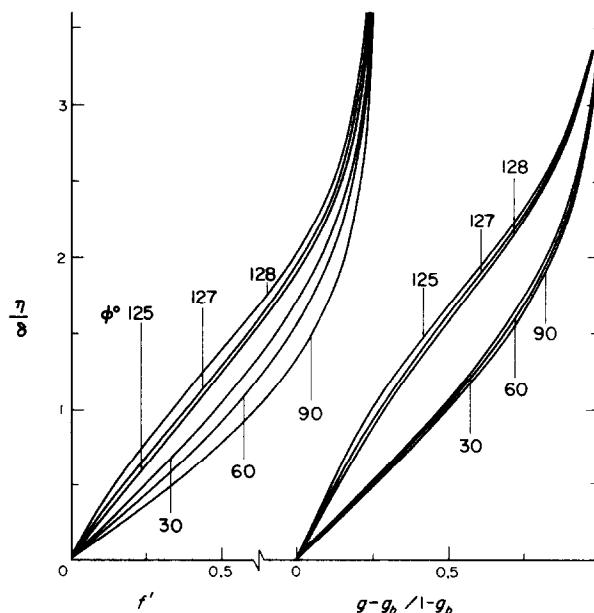


FIG. 10a. Profils reconstitués de la couche limite pour $i = 15^\circ$, $g_b = 1,64$, écoulement longitudinal.

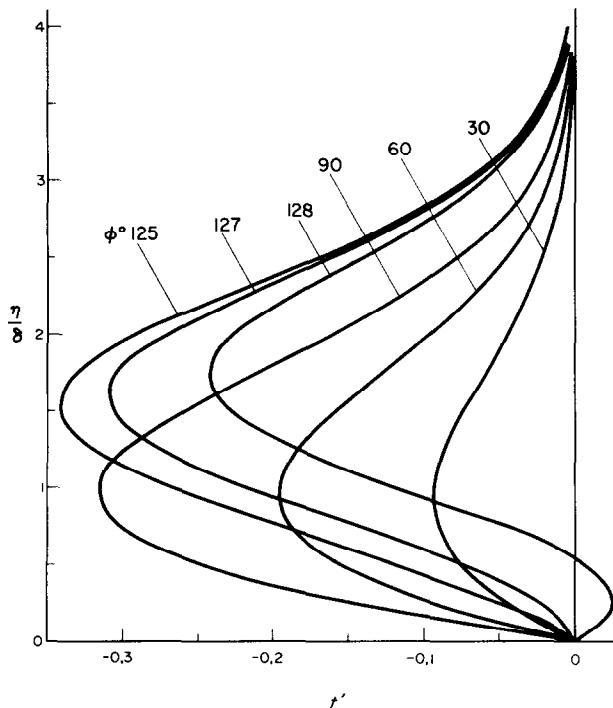


FIG. 10b. Profils reconstitués de la couche limite pour $i = 15^\circ$, $g_b = 1,64$, écoulement transversal.

6. CONCLUSION

Une méthode itérative a été présenté en vue de résoudre les équations de la couche limite tridimensionnelle laminaire. Avec pour but principal de réduire le nombre de dimensions à 2, les équations itératives proposées permettent en plus de découpler et linéariser l'équation de quantité de mouvement transversal. Les résultats numériques dans le cas concret d'un cône de révolution nous ont permis de dégager les points suivants:

Sur la ligne d'arrêt, la convergence est obtenue même sans aucune pondération de l'itération dans les cas sévères de gradient de pression transversal intense et de paroi chauffée. Mais par contre sur la surface du cône les itérations sont divergentes dans la zone de gradient de pression transversal décroissant. Néanmoins avec un coefficient de pondération de 0,5, la convergence a été obtenue jusqu'au décollement

et les résultats sont corrects au bout de 5 à 6 itérations.

La méthode itérative donne des résultats concordants avec la méthode de différences finies et les expériences, alors que l'approximation de faible écoulement transversal devient d'autant moins valable que le gradient de pression transversal et la température de paroi sont plus élevés.

Les équations itératives proposées ne sont pas les seules possibles. Elles n'ont été appliquées que sous forme intégrale dans le cas d'un cône. On peut cependant espérer que, dans le cas général, sur un obstacle de forme quelconque une méthode itérative peut être rapidement convergente même dans les zones de relaxation de l'écoulement transversal.

REFERENCES

1. J. DER, JR., A study of general three dimensional bound-

ary layer problems by an exact numerical method, A.I.A.A. Paper no 69-138 A.I.A.A. 7th Aerospace Sciences Meeting (Jan. 1969).

2. H. A. DWYER, Solution of a three dimensional boundary layer flow with separation, *AIAA Jl* 6 1336-1342 (1967).
3. M. G. HALL, A numerical method for calculating steady three-dimensional laminar boundary layers, RAE Technical Report 67 145 (June 1967).
4. J. C. COOKE et M. G. HALL, Boundary layers in three dimensions, *Prog. Aeronaut. Sci.*, Vol. 2. MacMillan (1962).
5. Y. Y. CHAN, An approximate method for three-dimensional compressible laminar boundary layers with small cross flow, Aeronautical Report LR-455, N.R.C. of Canada (June 1966).
6. T. K. FANNELOP, A method of solving the three-dimensional laminar boundary layer equations with application to the lifting reentry body, *AIAA Jl* 6, 1075-1084 (June 1968).
7. E. A. EICHELBRENNER, La couche limite tridimensionnelle en régime turbulent d'un fluide compressible: cas de paroi athermane, Agardograph 97, Part 2 (May 1965).
8. S. W. KANG, W. J. RAE et M. G. DUNN, Studies of three-dimensional compressible boundary layers on blunt lifting entry bodies, AGARD Conference Proceedings no. 30, Hypersonic Boundary Layers and Flow Fields (May 1968).
9. L. F. TSEN et J. F. ARNAUDON, Une méthode itérative en couche limite tridimensionnelle—Application à l'étude de l'effet de transfert de chaleur, Proceedings of the Second Canadian Congress of Applied Mechanics Univ. of Waterloo (May 1969).
10. J. C. COOKE, The laminar boundary layer on an inclined cone, R.A.E. Tech. Rept. no. 65 178 (August 1965).
11. N. D. VVEDENSKAYA, Calculation of the boundary layer arising in flow about a cone under an angle of attack, *Zh. Vych. Mat. mat. Fiz.* 6, 304-312 (1966).
12. R. R. BOERICK, The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flow, A.I.A.A. Paper no. 70-48. A.I.A.A. 8th Aerospace Sciences Meeting (1970).
13. B. ROUX et J. MARCILLAT, Séparation tridimensionnelle de la couche limite sur un cône circulaire en incidence, *C.R. Acad. Sci., Paris* 271A, 418-421 (1970).
14. K. I. BABENKO, G. P. VOSKRESENSKIY, A. N. LYUBIMOV et V. V. RUSANOV, Three-dimensional flow of ideal gas past smooth bodies, NASA TTF 380 (April 1966).
15. D. L. JONES, Numerical solutions of flow field for conical bodies in supersonic stream, Aeronautical Rept. LR 507 National Research Council of Canada (1968).
16. R. S. CRABBE, An application of Cooke's method to the laminar incompressible boundary layer on a right circular cone at incidence, National Aeron. Establ. Rept. LR 391 Ottawa (1963).
17. L. F. TSEN et J. F. ARNAUDON, Couche limite laminaire compressible sur une surface conique, Proceedings of the Canadian Congress of Applied Mechanics, Université Laval, vol. 2 (May 1967).
18. O. PINKUS et S. B. COUSIN Three-dimensional boundary layers on cones at small angles of attack, *J. Appl. Mech.* 634-640 (Dec. 1968).
19. Y. Y. CHAN, An experimental study of a yawed circular cone in hypersonic flow, *AIAA Jl* 7, 2035-2037 (1969).
20. W. D. HAYES, The three dimensional boundary layer, NAVORD Report 1313 (1951).
21. C. B. COHEN et E. RESHOTKO, Similar solutions of compressible boundary layer with heat transfer and pressure gradient, NACA Rept. no. 1293 (1956).
22. E. RESHOTKO, Laminar boundary layer with heat transfer on a cone at angle of attack in a supersonic stream, NACA TN 4152 (1957).
23. J. F. ARNAUDON, G. BARNAUD et L. F. TSEN, Influence de la température parietale sur l'écoulement transversal dans une couche limite laminaire tridimensionnelle, *C.R. Acad. Sci., Paris* 268A, 187-190 (Jan. 1969).

AN ITERATIVE CALCULATION OF THE THREE DIMENSIONAL BOUNDARY LAYER

Abstract—An iterative procedure is described for studying the three-dimensional compressible laminar boundary layer with heat transfer. The equations of motion are first written using a coordinate system tied to the external streamlines and the iterative equations are obtained by isolating and linearizing the transverse equation of motion, hence reducing the number of independent variables from three to two. When the weighting coefficient is zero the first iteration corresponds to the case of very weak cross-flows. The method is then applied to the integral equations of the boundary layer on a cone in supersonic flow. Convergence is obtained after five or six iterations even under severe conditions of strong cross-flows with heated walls. A comparison is made with measurements of pressure, wall-streamline directions, and heat transfer, carried out on a cone for a wide range of wall temperatures and incidence.

EINE ITERATIVE BERECHNUNG DER DREIDIMENSIONALEN GRENZSCHICHT

Zusammenfassung—Eine Iterationsprozedur wird beschrieben, um die dreidimensionale kompressible laminare Grenzschicht mit Wärmeübergang zu untersuchen. Die Bewegungsgleichungen werden zuerst beschrieben unter Benutzung eines Koordinatensystems, das man in die äusseren Stromlinien legt. Die iterativen Gleichungen erhält man durch Isolieren und Linearisieren der Gleichung für die Querbewegung. Daher reduziert sich die Zahl der unabhängigen Variablen von 3 auf 2. Wenn der beeinflussende Koeffizient zu Null wird, entspricht die erste Iteration dem Fall einer sehr schwachen Querströmung. Die

Methode wird dann angewandt auf die Integralgleichungen der Grenzschicht an einem Kegel in einer Überschallströmung. Selbst unter den erschwerten Bedingungen einer starken Querströmung mit beheizten Wänden erhält man nach fünf bis sechs Iterationen bereits Konvergenz. Ein Vergleich wird durchgeführt mit Messungen des Druckes, der Richtung der Wandstromlinie und des Wärmeüberganges an einem Kegel für einen grossen Bereich der Wandtemperaturen.

ИТЕРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Аннотация—Описывается итерационный метод изучения трехмерного сжимаемого ламинарного пограничного слоя при наличии теплообмена. Сначала уравнения движения записываются с помощью координатной системы, связанной с внешними линиями тока, а итерационные уравнения получаются путём отделения и линеаризации уравнения поперечного движения, следовательно, путем уменьшения числа независимых переменных от трех до двух. Когда коэффициент взвешивания равен нулю, первая итерация соответствует случаю очень слабых поперечных потоков. Далее этот метод применяется к интегральным уравнениям пограничного слоя на конусе в сверхзвуковом потоке. Получена сходимость после пяти или шести итераций даже в жестких условиях сильных поперечных потоков с нагретыми стенками. Проводится сравнение с измерениями давления, направлений течения вблизи стенки и переноса тепла, которые были выполнены на конусе в широком диапазоне изменения температур стенки и угла наклона.